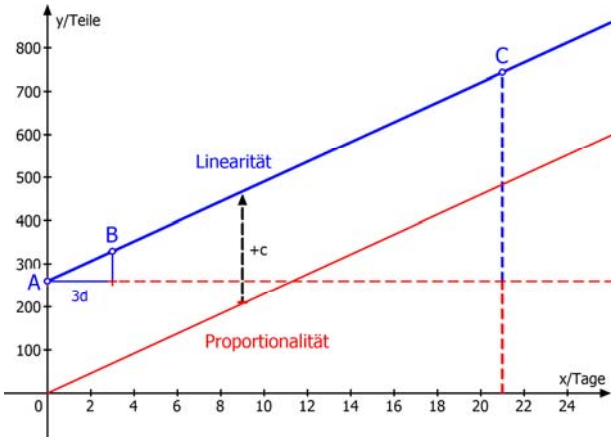
Zuordnungen

Linearität



Eine interessante Abweichung
von der Proportionalität

Stand 9. 12. 2019

Datei Nr. 10516

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

Sehr oft ist die Zunahme einer Menge oder Anzahl proportional zur verstrichenen Zeit. Wenn jedoch der Anfangsbestand nicht 0 war, dann gehorcht zwar die Zunahme einer Proportionalität, nicht mehr aber die vorhandene Menge.

Diese Problematik wird hier besprochen.

Im Grunde geht es um lineares Wachstum.

Inhalt

1	Problemstellung	3
2	Aufgabenblatt	8

Verwandte Texte:

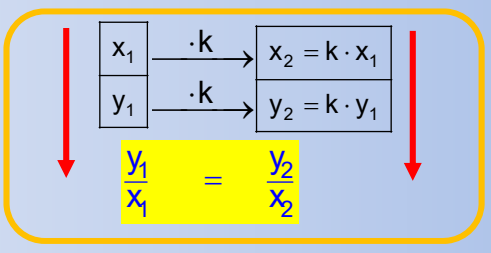
10510	Dreisatz-Rechnungen
10511	Umgekehrter Dreisatz
10512	Proportionalitäten, Tabellen und Schaubilder
10513	Tripel und gekoppelte Dreisätze
10514	Theorie zu Zustandstripeln
10515	Aufgabensammlung zu dem allem.
10516	Linearität (Dieser Text)

1 Problemstellung

Hier wird vorausgesetzt, dass man weiß, was Proportionalität für zwei Größen x und y bedeutet.
Man kann es kurz zusammenfassen:

Wenn x und y im gleichen Verhältnis zunehmen,

dann sind sie quotientengleich:



Also: Wenn der erste Zustand durch das Paar $(x_1 \mid y_1)$ beschrieben wird und ein anderer Zustand durch $(x_2 \mid y_2)$ wobei man feststellt, dass für alle Paare gilt: $x_2 = k \cdot x_1$ und $y_2 = k \cdot y_1$,
dann nennt man (bzw. sind) die Größen x und y (zueinander) **proportional.**

Und dann gelten auch Verhältnisgleichungen wie diese: $\frac{y_2}{x_2} = \frac{ky_1}{kx_1} = \frac{x_1}{x_2}$.

Wichtig ist dabei noch, dass bei einer Proportionalität stets auch das Paar $(0 \mid 0)$ dazu gehört.
Der Graph der Proportionalität ist daher stets eine Ursprungsgerade.

Beispiel 1

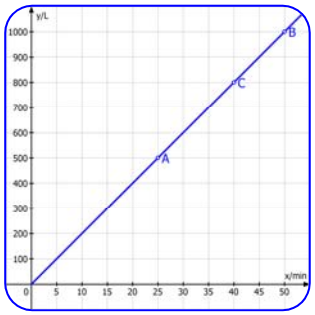
Ein leeres Becken wird so gefüllt, dass in 25 Minuten 500 Liter Wasser zufließen.

Wir beginnen also mit dem Paar $P_1(25\,\text{min} \mid 500\,\text{L})$.

In der doppelten Zeit 50 Minuten sind dann 1000 Liter geflossen: $P_2(50\,\text{min} \mid 1000\,\text{L})$.

Die Verhältnisse beider Paare sind gleich:

$$\frac{y}{x} = \frac{500\,\text{L}}{25\,\text{min}} = 20\,\frac{\text{L}}{\text{min}} \quad \text{und} \quad \frac{y}{x} = \frac{1000\,\text{L}}{50\,\text{min}} = 20\,\frac{\text{L}}{\text{min}}$$



Damit haben wir eine Proportionalitätsgleichung:

Für alle Paare gilt $y = 20\frac{\text{L}}{\text{min}} \cdot x$, wobei x die Zeit ist,

die seit Beginn des Einlaufens verstrichen ist.

Damit kann man beliebige Zustände (Paare) berechnen:

Nach x = 40 Minuten: $y = 20\frac{\text{L}}{\cancel{\text{min}}} \cdot 40\,\cancel{\text{min}} = 800\,\text{L}$ usw.

Oder wir fragen, wann 2400 Liter im Becken sind. Damit kennen wir $y = 2400\,\text{L}$.

Aus der Gleichung $y = 20\frac{\text{L}}{\text{min}} \cdot x$ folgt dann $\boxed{2400\,\text{L}} = 20\frac{\text{L}}{\text{min}} \cdot x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2400\,\text{L}}{20\frac{\text{L}}{\text{min}}} = 120\,\text{min}$

Nun verändern wir die Situation:

Das Becken soll bei Beginn des Wassereinlaufs bereits 300 Liter Wasser beinhalten.

Wir wollen annehmen, dass die Zuflussstärke gleich groß ist, also 500 Liter in 25 Minuten.
Um jetzt den Füllstand zu ermitteln, müssen wir zu den Zuflusswerten immer die Anfangsmenge addieren. Dazu ist es günstig, eine Tabelle zu verwenden:

Die ersten zwei Zeilen geben die Proportionalität zwischen Zeit x und Zuflussmenge ΔV wieder: $\Delta V = 20\ \frac{L}{min} \cdot x$

In der 3. Zeile steht dann der Beckeninhalt:

Zuflusszeit in min	0	25	40	50	x
Zuflussmenge in L	0	500	800	1000	ΔV
Beckeninhalt in L	300	800	1100	1300	V

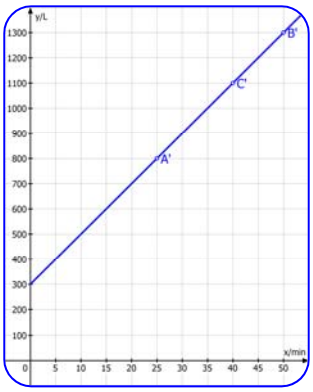
$\boxed{y = 20\frac{L}{min} \cdot x + 300\ L}$ dies ist keine Proportionalität mehr, sondern eine **Linearität.**

Ich habe nun statt y V für Volumen verwendet. ΔV (gelesen „Delta V“) ist die übliche Bezeichnung für die Änderung von V (Das Deltazeichen Δ bedeutet „Differenz“).

Den Grund für diese Bezeichnung „linear“ erkennt man in nebenstehender Graphik, also im Schaubild der Gleichung:

$y = 20 \cdot x + 300$. Dieses ist nämlich eine Gerade.

Sie entsteht aus der Proportionalitätsgeraden $y = 20 \cdot x$ durch Addition der Anfangsmenge 300.



Man kann sich nun selbst weitere Linearitäten ausdecken.

Eine Linearität entsteht immer dann, wenn man zu einer Proportionaliät (deren Werte bei $(0\,|\,0)$ beginnen), einen Anfangswert addieren muss.

Beispiel 2:

Eine Fabrik produziert Ersatzteile für den Autobau.
Es ist bekannt, dass in 3 Tagen 69 Ersatzteile hergestellt werden.
Im Lager befinden sich bereits 260 fertige Ersatzteile.
Wie viele sind es nach 3 Wochen?

Hier wird natürlich vorausgesetzt, dass die Produktion gleichmäßig abläuft und zwischenzeitlich keine Teile dem Lager entnommen werden. Dann sind die produzierte Menge und die Zeitspanne der Produktion proportional. Um die Gleichung aufzustellen rechnet man: $\frac{y}{x} = \frac{69\ (Teile)}{3\ (Tage)} = 23(\frac{Teile}{Tag})$.

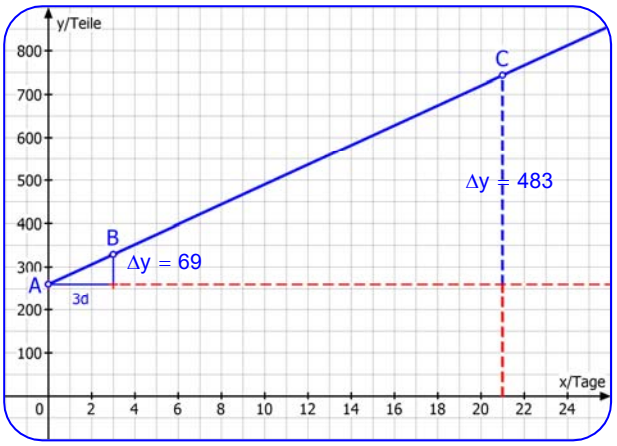
Ich habe hier Einheiten in Klammern gesetzt, weil man sie eigentlich nicht benötigt, wenn klar ist, was x und y bedeuten (x = Zeitspanne (Tage) und y = Anzahl der gefertigten Teile). Daraus folgt $y = 23 \cdot x$. Das ist die Proportionalitätsgleichung. Eine Gleichung zur Berechnung der im Lager befindlichen Ersatzteile entsteht daraus, indem man den Anfangsbestand 260 dazu addiert. Doch die Anzahl der vorhandenen Ersatzteile darf man nicht auch noch mit y bezeichnen. Will man das jedoch tun, dann sollte man für die gefertigten Teile besser Δy verwenden. Das beschreibt dann die dazu kommenden Teile. Dann ist $\boxed{\Delta y = 23 \cdot x}$ und dann folgt: $y = 260 + \Delta y$ bzw. $\boxed{y = 260 + 23 \cdot x}$.

Und das ist eine Linearität. Das Schaubild dieser Gleichung ist diese Gerade:

Das Schaubild der Gleichung ist die Gerade durch A, B und C.
In 3 Tagen nimmt die Anzahl der hergestellten Teile um 69 zu, in einem Tag also um 23, in 21 Tagen sind es $23 \cdot 21 = 483$.
Dann befinden sich

$$y = 23 \cdot \boxed{21} + 260 = 743$$

Teile im Lager.



Die horizontale gestrichelte Linie gibt den *Anfangsbestand* an.
Alles was darüber hinausgeht, sind die inzwischen produzierten Teile.

Wann beträgt der Lagerbestand 582 Teile?

1. Lösungsmöglichkeit: Man subtrahiert zuerst den Anfangsbestand: $582 - 260 = 322$:
Dann ermittelt man, wie lange es gedauert hat, bis diese 322 Teile produziert waren:

Jetzt wendet man entweder die Proportionalität, denn die Paare $(x \mid 322)$ und $(3 \mid 69)$ sind verhältnisgleich:

$$\frac{x}{322} = \frac{3}{69} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\cancel{3} \cdot 322}{\cancel{69}_{23}} = \frac{322}{23} = 14 \quad \text{(Tage)}.$$

Oder man wendet einen Dreisatz an:

Für 69 Teile braucht man 3 Tage,
für 1 Teil $\frac{3}{69}$ Tage,
für 322 Teile dann $\frac{\cancel{3} \cdot 322}{\cancel{69}_{23}} = \frac{322}{23} = 14$ Tage.

2. Lösungsmöglichkeit: Man verwendet die Gleichung $\boxed{y = 260 + 23 \cdot x}$ und setzt $y = 582$ ein:

$$\boxed{582} = 260 + 23 \cdot x \quad | \; -260$$
$$322 = 23 \cdot x \quad | : 23$$
$$x = \frac{322}{23} = 14 \quad \text{(Tage)}.$$

Beispiel 3:

Nochmals ein Wasserbecken. Jetzt messen wir den Wasserstand y im Becken in Abhängigkeit von der Zeit. Nach 3 Stunden beträgt der Wasserstand 94 cm, nach 5 Stunden 130 cm.
Wie hoch steht das Wasser nach 6 Stunden im Becken, und wann ist der Wasserstand 76 cm?

Lösung:

Um zu erkennen, ob eine Proportionalität vorliegt, erstellt man eine Tabelle mit 3 Zeilen:

x = Füllzeit in h	3	5	0	6	x_5
y = Wasserstand in cm	94	130		y_4	76
Δy = Höhenzunahme pro Stunde					

Überprüfung der Proportionalität anhand der Paare $P_1(3\,|\,94)$ und $P_2(5\,|\,130)$:

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{94}{3} = 31\tfrac{1}{3} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{y_2}{x_2} = \frac{130}{5} = 26$$

Weil diese Quotienten nicht gleich sind, liegt auch keine Proportionalität vor.
Vermutung: Es wird eine Anfangsfüllhöhe vorliegen.
Also untersuche ich die Proportionalität nicht für die Füllhöhe sondern für die Zunahme der Höhe.

Dazu rechne ich aus, dass zwischen diesen beiden Paaren eine Zeitspanne von $\Delta x = 5 - 3 = 2$ Stunden liegt. Und in diesen 2 Stunden hat die Höhe um $\Delta y = 130 - 94 = 36$ cm zugenommen.

Also folgt: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{36\text{ cm}}{2\text{ h}} = 18\frac{\text{cm}}{\text{h}}$. Das ist die sogenannte **Zuwachsrate.**

Nun folgt diese Überlegung (Zweisatz):

Wenn die Wasserhöhe pro Stunde um 18 cm zunimmt,
dann hat sie in 3 Stunden um 54 cm zugenommen.

Also betrug der Wasserstand am Anfang (also bei x = 0): $y = 94\text{ cm} - 54\text{ cm} = 40\text{ cm}$

Jetzt kann man die Tabelle ausfüllen:

x = Füllzeit in h	3	5	0	6	x_5
y = Wasserstand in cm	94	130	40	y_4	76
Δy = Höhenzunahme pro Stunde	18	18	18	18	18

Für die Zeit $x_4 = 6\text{ h}$ folgt dann $y_4 = 40\text{ cm} + 6\text{h} \cdot 18\frac{\text{cm}}{\text{h}} = 40\text{ cm} + 108\text{ cm} = 148\text{ cm}$.

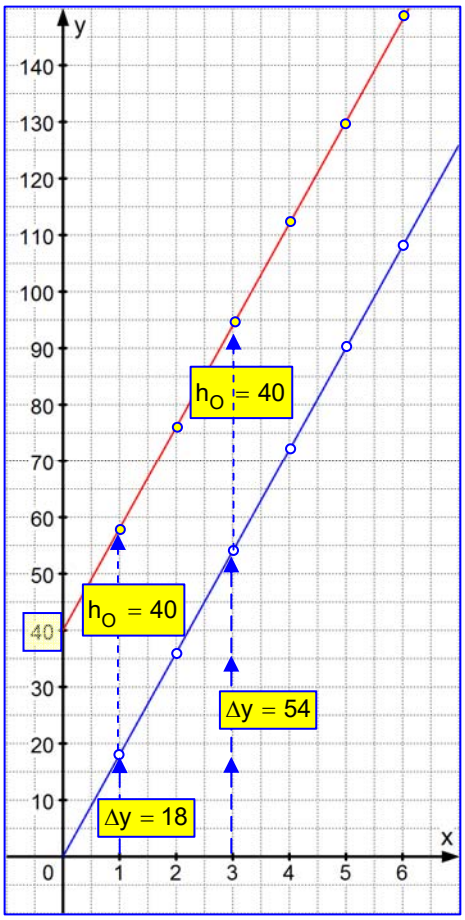
Der Wasserstand $y_5 = 76$ bedeutet eine Zunahme um $\Delta y = 76\text{ cm} - 40\text{ cm} = 36\text{ cm}$.
Dies führt auf genau 2 Stunden.

Ergebnis: Nach 6 Stunden ist der Wasserstand 148 cm, und nach 2 Stunden 76 cm.

Zusatz: Die Gleichung für diese Linearität lautet: $y = 40 + 18 \cdot x$

Dies ist die Gleichung unseres Zusammenhangs zwischen y und x.

Trägt man die zugehörigen Paare in ein Koordinatensystem ein, ergibt sich dies:



Die Ursprungsgerade (blau) stellt die Proportionalität zwischen Fülldauer x und Höhenzunahme Δy dar.

Ihre Gleichung lautet: $\Delta y = 18\,\frac{cm}{h} \cdot x$

Weil zu jeder Zeit die bei Füllbeginn vorhandene Wassermenge als Füllhöhe $h_O = 40$ cm dazu addiert werden muss, verschiebt sich dadurch die Gerade um 40 nach oben.
Es entsteht die rote Gerade, welche nun die Wasserstands-Höhe (Füllhöhe) anzeigt.

So kommt man zur Gleichung $y = 18\,\frac{cm}{h} \cdot x + 40\ cm$.

Ihr Schaubild ist eine Gerade, welche die y-Achse bei 40 schneidet. Diese Zahl markiert den **Anfangszustand**!

Berechnung von Werten mit dieser Gleichung

a) Berechne den Wasserstand nach 4 h 20 min.

Also ist $x = 4h + \frac{1}{3}h = \frac{13}{3}h$. Eingesetzt:

$$y = \cancel{18}^{6}\ \frac{cm}{\cancel{h}} \cdot \frac{13}{\cancel{3}}\cancel{h} + 40\ cm = 78\ cm + 40\ cm = 118\ cm$$

b) Nach welcher Zeit x beträgt der Wasserstand y = 76 cm?

Wir setzen 76 für y ein:

$$\boxed{y} = 18\,\frac{cm}{h} \cdot x + 40\ cm$$

$$\boxed{76\ cm} = 18\,\frac{cm}{h} \cdot x + 40\ cm$$

Subtrahieren wir die Anfangshöhe 40 cm auf beiden Seiten, folgt

$36\ cm = 18\,\frac{cm}{h} \cdot x$ | Dividieren durch $18\,\frac{cm}{h}$ ergibt

$$x = \frac{36\ cm}{18\,\frac{cm}{h}} = 2h$$

2 Aufgabenblatt

(1) Ein Glasbecken mit 5 cm Wandstärke wird mit einer Flüssigkeit gefüllt.

Man wiegt den Behälter zuerst leer und erhält 8,6 kg Masse. Dann wird er teilweise gefüllt. Man notiert folgende Daten: 12 Liter wiegen mit Behälter 23 kg und 17 L ergeben eine Gesamtmasse von 29 kg.

a) Überprüfe, ob die beiden Angaben zusammen passen. Welche Masse hat 1 L Flüssigkeit. Stelle die Gleichung dieses Zusammenhangs auf.

b) Welche Gesamtmasse ergeben 36 Liter oder 52 Liter?

c) Wie viel Liter sind im Becken, wenn die Waage 60 kg bzw. 23 kg anzeigt?

d) Stelle die Gleichung im Schaubild dar.

(2) Ein Taxifahrer hat das Recht, seine Fahrt mit einer Grundgebühr zu beginnen.
Auf seinem Taxameter steht daher bei Beginn der Fahrt bereits eine Grundgebühr. Wenn er dann abfährt, läuft das Zählwerk und ermittelt den Endpreis linear zur gefahrenen Wegstrecke.

a) Elmar fährt mit dem Taxi Nummer 22 und fragt den Taxifahrer zuvor nach seinen Preisen. Dieser antwortet ihm: „Meine Grundgebühr ist 2 €, und pro km verlange ich 1,20 €“.
Was bezahlt dann Elmar für eine Fahrstrecke von 6 km?

Stelle eine Berechnungsformel für dieses Taxi auf, in der folgende Größen vorkommen:

y	zu bezahlender Fahrpreis
y_O	Grundgebühr:
m	Fahrpreis pro km
x	Gefahrene Wegstrecke.

b) Franziska fährt mit dem Taxi Nummer 77 eine Wegstrecke von 6,5 km. Sie bezahlt dann 8,50 €. Sie erkennt bei Abfahrt den Zählerstand 2 €.
Was kostet dann hier die Fahrt pro Kilometer?
Wie viel hätte sie für die doppelte Wegstrecke bezahlen müssen?
Stelle die Berechnungsgleichungen für den Fahrpreis auf

c) Herbert fährt mit dem Taxi 99, von dem er weiß, dass der Taxifahrer pro Kilometer 0,75 € berechnet. Er glaubt daher, dass dieser günstiger ist.
Er bezahlt für 12 km 13,00 €. Wie hoch ist hier die Grundgebühr?
Stelle die Berechnungsgleichungen für den Fahrpreis auf

d) Wie viel hätte Herbert für seine Fahrt mit dem Taxi 77 bezahlen müssen und wie viel Franziska mit dem Taxi 99?
Bei welcher Fahrstrecke verlangen beide Taxis gleich viel? Erstelle dazu ein Schaubild für beide Taxigleichungen 77 und 99 und zwar für $0 \le x \le 14$ mit Längeneinheit 0,5 cm.

(3) Flutschi möchte sich ein Fahrrad kaufen

Er bekommt zum Geburtstag von Onkel Waldemar 50 € geschenkt, zusammen mit einem Sparschwein. Er beschließt, von seinem wöchentlichen Taschengeld immer 5 € in dieses Sparschwein zu stecken.

a) Wie viel Geld enthält das Sparschwein beim nächsten Geburtstag?
Kannst Du eine Gleichung zur Berechnung der Sparsumme y aufstellen, wenn man mit x die Zahl der Wochen bezeichnet?

b) Wann kann er sich das Fahrrad leisten, wenn es 450 € kostet?
Wann reicht es zum Sportrad mit 798 €?

c) Wie viel hätte ihm Onkel Waldemar gleich schenken sollen, damit er sich nach 42 Wochen ein Rad für 290 € kaufen kann?

Lösung Aufgabe 1: Wiegen mit Verpackungsgewicht

Ein Glasbecken mit 5 cm Wandstärke wird mit einer Flüssigkeit gefüllt.

Man wiegt den Behälter zuerst leer und erhält 8,6 kg Masse. Dann wird er teilweise gefüllt. Man notiert folgende Daten: 12 Liter wiegen mit Behälter 23 kg und 17 L ergeben eine Gesamtmasse von 29 kg.

a) Überprüfe, ob die beiden Angaben zusammenpassen.
Welche Masse hat 1 L Flüssigkeit.
Stelle die Gleichung dieses Zusammenhangs auf.
b) Welche Gesamtmasse ergeben 36 Liter oder 52 Liter?
c) Wie viel Liter sind im Becken, wenn die Waage 60 kg bzw. 23 kg anzeigt?
d) Stelle die Gleichung im Schaubild dar.

Lösung

a) Wir müssen beachten, dass folgendes gilt:

Gesamtmasse = Glasmasse + Flüssigkeitsmasse.

Also Gesamtmasse = 8,6 kg + Flüssigkeitsmasse.

Aufstellen einer Tabelle:

x = Volumen in L	0	12	2717
y = Masse in kg	8,6	23	29

Die darin stehenden Paare $P_1(0\,L\,|\,8{,}6\,kg)$ $P_2(12\,L\,|\,23\,kg)$ und $P_3(17\,L\,|\,29\,kg)$ sind nicht quotientengleich und die beiden Größen Volumen und Masse sind nicht proportional, weil ein Anfangsgewicht vorhanden ist. Man kann auch sagen, weil das Paar (0|0) nicht dazu gehört.

Methode:

Man ergänze die Tabelle durch die Zeile **Massenzunahme** Δy:

x = Volumen in L	0	12	17
y = Masse in kg	8,6	23	29
$\Delta y =$ Massenzunahme in kg	0	23 – 8,6 = 14,4	29 – 8,6 = 20,4

Achtung: Entdecken: Volumen und Massenzunahme sind proportional:

Für $P_2(12\,L\,|\,23\,kg)$ folgt $\frac{\Delta y}{x} = \frac{14.4\,kg}{12\,L} = 1{,}2\frac{kg}{L}$

Für $P_3(17\,L\,|\,29\,kg)$ folgt $\frac{\Delta y}{x} = \frac{20{,}4\,kg}{17\,L} = 1{,}2\frac{kg}{L}$

} 1 Liter wiegt somit 1,2 kg.

Jetzt setzen wir das zu einer Gleichung zusammen:

Es ist offenbar $m = \frac{\Delta y}{x} = 1{,}2\frac{kg}{L}$ also folgt $\Delta y = 1{,}2\frac{kg}{L} \cdot x$

Zu dieser Massenzunahme kommt noch die Glasmasse, also folgt

$$y = \underbrace{1{,}2\frac{kg}{L} \cdot x}_{\Delta y} + 8{,}6\,kg\,,$$

$$\boxed{y = 1{,}2\frac{kg}{L} \cdot x + 8{,}6\,kg}$$

b) Welche Gesamtmasse ergeben 36 Liter bzw. 52 Liter?

1. Berechnungsmöglichkeit über die Gleichung:

In der Gleichung $y = 1{,}2\frac{kg}{L} \cdot x + 8{,}6\,kg$ gibt x die Zahl der Liter an und y die Gesamtmasse.

Erkennen: Gegeben sind x = 36 L

Berechnen von y: Für x 36 L einsetzen:

$$y = 1{,}2\frac{kg}{L} \cdot \boxed{36\,L} + 8{,}6\,kg = 51{,}8\,kg\,.$$

Entsprechend folgt für $x = 52\,L$ $y = 1{,}2\frac{kg}{L} \cdot \boxed{52\,L} + 8{,}6\,kg = 71\,kg$

Ergebnis: Füllt man 36 Liter in das Becken, beträgt die Gesamtmasse 51,8 kg, 52 L ergeben 71 kg.

2. Berechnungsmöglichkeit über eine Tabelle:

x = Volumen in L	0	$\boxed{36}$	$\boxed{52}$
y = Masse in kg	8,6	51,8	71
Δy = Massenzunahme in kg	0	43,2	62,4

$\boxed{+8{,}6}$ $\boxed{\cdot 1{,}2}$ $\boxed{+8{,}6}$

c) Wie viel Liter sind im Becken, wenn die Waage 60 kg bzw. 23 kg anzeigt?

1. Berechnungsmöglichkeit über die Gleichung

Gegeben: Gesamtmasse y = 60 (kg)
Gesucht: x = Anzahl der Liter im Becken.
Berechnen von x: Für y 60 kg einsetzen, dann nach x umstellen:
Gleichung: $\boxed{y} = 1{,}2\frac{kg}{L} \cdot x + 8{,}6\,kg$

$$\boxed{60\,kg} = 1{,}2\frac{kg}{L} \cdot x + 8{,}6\,kg$$

Abziehen der Glasbeckenmasse 8,6 kg ergibt:

$$51{,}4\,kg = 1{,}2\frac{kg}{L} \cdot x$$

$$x = \frac{51{,}4\,kg}{1{,}2\,\frac{kg}{L}} \approx 42{,}8\,L$$

Analog folgt zu y = 23 kg:

Gleichung: $\boxed{y} = 1{,}2\,\frac{kg}{L} \cdot x + 8{,}6\ kg$

$\boxed{23\ kg} = 1{,}2\,\frac{kg}{L} \cdot x + 8{,}6\ kg$

Abziehen der Glasbeckenmasse 8,6 (kg):

$$14{,}4\ kg = 1{,}2\,\frac{kg}{L} \cdot x \quad \text{ergibt} \quad x = \frac{14{,}4\ kg}{1{,}2\ \frac{kg}{L}} = 12\ L$$

2. Berechnungsmöglichkeit über eine Tabelle:

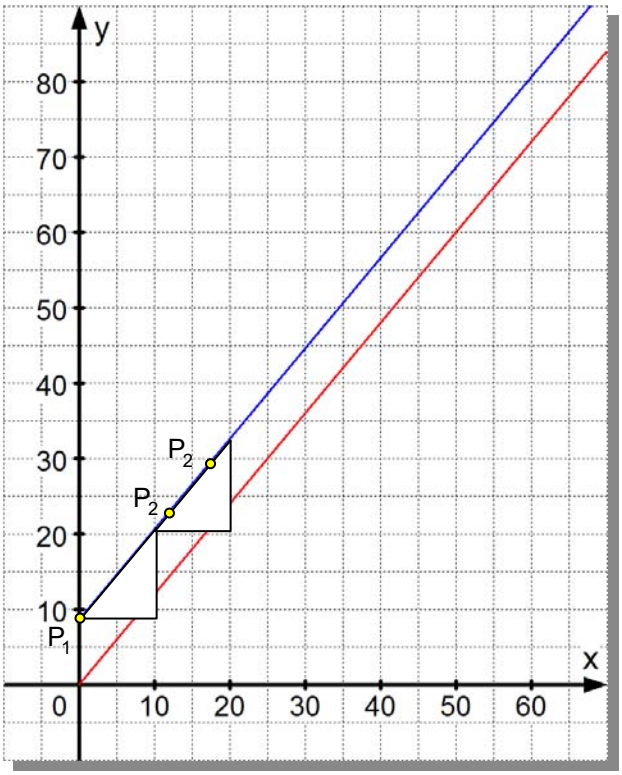
x = Volumen in L	0	42,8		12
y = Masse in kg	8,6	60	–8,6 : 1,2	23 –8,6
$\Delta y =$ Massenzunahme in kg	0	51,4		14,4

d) **Schaubild der Gleichung:**

Wir haben diese Paare gegeben:
$P_1(0\ L \mid 8{,}6\ kg)$ $P_2(12\ L \mid 23\ kg)$ und
$P_3(17\ L \mid 29\ kg)$

Außerdem kennen wir die Steigung
$m = 1{,}2\,\frac{kg}{L} = \frac{12}{10}\,\frac{kg}{L}$.

P_1 gibt den Anfangszustand wieder.



Lösung Aufgabe 2: (Taxigebühren)

Ein Taxifahrer hat das Recht, seine Fahrt mit einer Grundgebühr zu beginnen. Auf seinem Taxameter steht daher bei Beginn der Fahrt bereits eine Startsumme. Wenn er dann abfährt, läuft das Zählwerk und ermittelt den Endpreis, die Zunahme des Preises geht proportional zur gefahrenen Wegstrecke.

daher a) Elmar fährt mit dem Taxi Nummer 22 und fragt den Taxifahrer zuvor nach seinen Preisen. Dieser antwortet ihm:
Meine Grundgebühr ist 2 €, und pro km verlange ich 1,20 €.
Was bezahlt dann Elmar für eine Fahrstrecke von 6 km?
Stelle eine Berechnungsformel für dieses Taxi auf, in der folgende Größen vorkommen:

y	zu bezahlender Fahrpreis
y_O	Grundgebühr:
m	Fahrpreis pro km
x	Gefahrene Wegstrecke.

b) Franziska fährt mit dem Taxi Nummer 77 eine Wegstrecke von 6,5 km. Sie bezahlt dann 8,50 €.
Sie erkennt bei Abfahrt den Zählerstand 2 €.
Was kostet dann hier die Fahrt pro Kilometer?
Wie viel hätte sie für die doppelte Wegstrecke bezahlen müssen?
Stelle die Berechnungsgleichungen für den Fahrpreis auf

c) Herbert fährt mit dem Taxi 99, von dem er weiß, dass der Taxifahrer pro Kilometer 0,75 € berechnet. Er glaubt daher, dass dieser günstiger ist.
Er bezahlt für 12 km genau 13,00 €. Wie hoch ist hier die Grundgebühr?
Stelle die Berechnungsgleichungen für den Fahrpreis auf

d) Wie viel hätte Herbert für seine Fahrt mit dem Taxi 77 bezahlen müssen und wie viel Franziska mit dem Taxi 99?
Bei welcher Fahrstrecke verlangen beide Taxis gleich viel?
Erstelle dazu ein Schaubild für beide Taxigleichungen 77 und 99 und zwar für $0 \le x \le 14$ mit Längeneinheit 0,5 cm.

Lösung

a) Der Fahrer verlangt pro km 1,20 € und hat eine Grundgebühr von 2,00 €.
Dann berechnet sich der Fahrpreis für 6 km so:

$$y = 1{,}20\,\frac{€}{\cancel{km}} \cdot 6\ \cancel{km} + 2\,€ = 7{,}2\,€ + 2\,€ = 9{,}20\,€.$$

Es sei x die Wegstrecke in km
m der Preis pro km
y der gesamte Fahrpreis
y_O die Grundgebühr,

dann gilt: $y = y_0 + m \cdot x$ oder $\boxed{y = m \cdot x + y_O}$

Also: $\boxed{y = 1{,}20\,\frac{€}{km} \cdot x + 2\,€}$

b) Franziska fährt mit dem Taxi Nummer 77 eine Wegstrecke von 6,5 km.
Sie bezahlt dann 8,50 €, die Grundgebühr beträgt y_O = 2 €:

1. Lösung mit der Taxigleichung: $y = m \cdot x + y_O$

Wir setzen ein: $8{,}5\ € = m \cdot 6{,}5\ km + 2\ €$

Subtraktion der Grundgebühr; $6{,}5\ € = m \cdot 6{,}5\ km$

Division durch 6,5 km ergibt: $\frac{6{,}5\ €}{6{,}5\ km} = m$ bzw. $m = 1\frac{€}{km}$.

Er verrechnet also 1 € für jeden Kilometer.

Die Taxigleichung für das Taxi 77 lautet daher so:

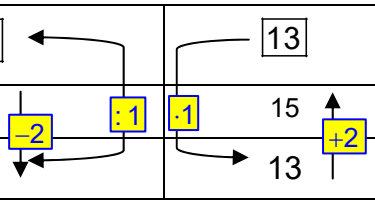
$$\boxed{y = 1\frac{€}{km} \cdot x + 2\ €}$$

Für die doppelte Strecke (13 km) bezahlt Franziska dann

$$y = 1\frac{€}{\cancel{km}} \cdot 13\ \cancel{km} + 2\ € = 15\ €$$

2. Lösung mit einer Tabelle:

x = Wegstrecke in km	0	6,5	13
y = Fahrpreis in €	2	8,5	15
Δy = Preiszunahme in €	0	6,5	13



Beim mittleren Paar erkennt man den Quotienten $m = \frac{\Delta y}{x} = \frac{6{,}5\ €}{6{,}5\ km} = 1\frac{€}{km}$

c) Herbert fährt mit dem Taxi 99, von dem er weiß, dass der Taxifahrer pro Kilometer 0,75 € berechnet. Er glaubt daher, dass dieser günstiger ist.
Er bezahlt für 12 km 13,00 €. Wie hoch ist hier die Grundgebühr?

1. Lösung (durch Nachdenken / Zweisatz):

Bei Taxi 99 kostet 1 km 0,75 €, also kosten 12 km $12 \cdot 0{,}75\ € = 9\ €$.
Er bezahlt jedoch 13 €, also hat der Fahrer 4 € Grundgebühr verlangt.

2. Lösung mit der Taxigleichung:

Es gilt bekanntlich $\boxed{y = m \cdot x + y_O}$.

Setzt man ein: x = 12 km, $m = 0{,}75\frac{€}{km}$ und y = 13 €, dann ergibt das

$$13\ € = \underbrace{0{,}75\frac{€}{\cancel{km}} \cdot 12\ \cancel{km}}_{9\ €} + y_O$$

Subtrahiert man 9 € auf beiden Seiten, folgt y_O = 13 € - 9 € = 4 €.

Daraus ergibt sich für Taxi 99 diese Taxigleichung $\boxed{y = 0{,}75\frac{€}{km} \cdot x + 4\ €}$

d) Herbert fährt jetzt mit dem Taxi 99. Für dieses gilt: $\boxed{y = 0{,}75\,\frac{€}{km}\cdot x + 4\,€}$.
Er bezahlt für 12 km 13 €.

Fährt er mit Taxi 77, gilt die Gleichung $\boxed{y = 1\,\frac{€}{km}\cdot x + 2\,€}$.

Daraus folgt für 12 km: $y = 1\,\frac{€}{\cancel{km}}\cdot 12\,\cancel{km} + 2\,€ = 12\,€ + 2\,€ = 14\,€$

Franziska fährt mit dem Taxi 77 . Für dieses gilt $\boxed{y = 1\,\frac{€}{km}\cdot x + 2\,€}$.

Sie bezahlt für 6,5 km 8,50 €.

Fährt sie mit Taxi 99, gilt die Gleichung $\boxed{y = 0{,}75\,\frac{€}{km}\cdot x + 4\,€}$.

Daraus folgt für 6,5 km $y = 0{,}75\,\frac{€}{\cancel{km}}\cdot 6{,}5\,\cancel{km} + 4\,€ = 8{,}875\,€ \approx 8{,}88\,€$.

Ergebnis:

Für kurze Strecken ist das Taxi 77 günstiger, für längere das Taxi 99.

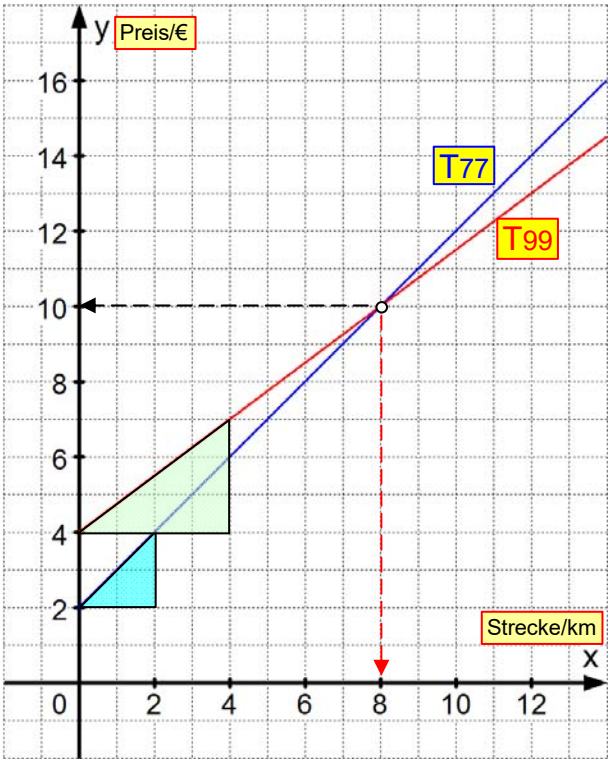
Es gibt offenbar eine mittlere Strecke, in der beide Taxis denselben Preis verlangen.

Diesen bekommt man, wenn man das Schaubild für beide Taxigleichungen anfertigt:

Auf der y-Achse erkennt man den Grundpreis bei 0 gefahrenen km !

Dort wo sich die Geraden schneiden kosten beide Taxi dasselbe, also für 8 km 10 €.

T77 ist für Strecken bis 8 km günstiger, T99 für Strecken ab 8 km.



<u>Lösung mit den Taxigleichungen:</u>
(Für diejenigen, die schon Gleichungen lösen können:)

T77: $y = 1\,\frac{€}{km}\cdot x + 2\,€$

T99: $y = 0{,}75\,\frac{€}{km}\cdot x + 4\,€$

Gleicher Fahrpreis bedeutet, dass $1\,\frac{€}{km}\cdot x + 2\,€ = 0{,}75\,\frac{€}{km}\cdot x + 4\,€$ gilt.

Ordnen: $1\,\frac{€}{km}\cdot x - 0{,}75\,\frac{€}{km}\cdot x = 4\,€ - 2\,€$ ergibt $0{,}25\,\frac{€}{km}\cdot x = 2\,€ \quad |:0{,}25\,\frac{€}{km}$

Ergebnis: $x = \frac{2\,€}{0{,}25\,\frac{€}{km}} = 8\,km$ Zugehöriger Fahrpreis: $y = 1\,\frac{€}{km}\cdot 8\,km + 2\,€ = 10\,€$.

Lösung Aufgabe 3: Sparschwein

Flutschi möchte sich ein Fahrrad kaufen. Er bekommt zum Geburtstag von Onkel Waldemar 50 € geschenkt, zusammen mit einem Sparschwein. Er beschließt, von seinem wöchentlichen Taschengeld immer 5 € in dieses Sparschwein zu stecken.

a) Wie viel Geld enthält das Sparschwein beim nächsten Geburtstag?

Kannst Du eine Gleichung zur Berechnung der Sparsumme y aufstellen, wenn man mit x die Zahl der Wochen bezeichnet?

b) Wann kann er sich das Fahrrad leisten, wenn es 450 € kostet? Wann reicht es zum Sportrad mit 798 €?

c) Wie viel hätte ihm Onkel Waldemar gleich schenken sollen, damit er sich nach 42 Wochen ein Rad für 290 € kaufen kann?

Lösung

a) Das Startkapital beträgt $y_O = 50\ €$.

Nach einer Woche ist die Sparsumme $y = 50\ € + 5\ € = 55\ €$

Nach 2 Wochen: $y = 50\ € + 5\ € \cdot 2 = 60\ €$

Nach x Wochen: $y = 50\ € + 5\ € \cdot x$

Nach 52 Wochen: $y = 50\ € + 5\ € \cdot 52 = 310\ €$

b) Die Sparsumme beträgt 450 €:
Subtrahiert man davon das Geburtstagsgeschenk von 50 €, dann muss Flutschi 400 € ansparen, das schafft er bei regelmäßigem Sparen von 5 € in $\frac{400}{5} = 80$ Wochen.
Hätte Onkel Waldemar beim nächsten Geburtstag nochmals 50 € gegeben, dann hätte dies die Sparzeit um 10 Wochen verringert, dann hätte Flutschi sein Rad bereits nach 70 Wochen.

Das teure Sportrad für 798 € muss man zuerst aufrunden auf 800 €, denn er erhöht sein Kapital ja immer um 5 €.

Bei einmaligem Geschenk von Waldemar: $x = \frac{750}{5} = 150$ Wochen.

Wenn Waldemar beim 2. Geburtstag wieder 50 € gibt, reduziert sich die Spardauer um 10 Wochen, dann sind es 140 Wochen, also 2 Jahre und 36 Wochen. Bei weiteren 50 € von Waldemar reicht es nach 130 Wochen, also 2 Jahre und 26 Wochen.

c) In 1 Woche spart Flutschi 5 €, in 42 Wochen sind es $42 \cdot 5\ € = 210\ €$.
Dann fehlen noch 80 €, die Onkel Waldemar hätte schenken sollen.